Formules efficaces pour $\zeta(n)$

par
Simon Plouffe
27 novembre 2023

Résumé

Dans les Ramanujan Notebooks, on peut apercevoir une formule originale.

$$\zeta(3) = \frac{7\pi^3}{180} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(e^{2\pi n} - 1)}$$

Qui m'a inspiré pour en trouver d'autres semblables bien après avec les puissances de π et $\zeta(n)$, $n > 1$. Je présente ici une nouvelle gamme de formules du même genre mais nettement plus efficaces pour le calcul. Elles s'appliquent à toutes les valeurs de n. Ces nouvelles formules permettent d'évaluer les toutes les valeurs de la fonction Zeta avec une efficacité de 3.85 et 5.46 décimales par terme. En exploitant certaines de ces séries on obtient une formule explicite pour la n'ième décimale de $\zeta(3)$.

Summary

In the Ramanujan Notebooks, we can see an original formula.

$$\zeta(3) = \frac{7\pi^3}{180} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(e^{2\pi n} - 1)}$$

Which inspired me to find similar ones much later with powers of π and $\zeta(n)$, $n > 1$. Here I present a new range of formulas of the same kind, but considerably more efficient for calculation. They apply to all values of n. These new formulas allow all Zeta function values to be evaluated with an efficiency of 3.85 and 5.46 decimal places per term.

Introduction

Nous revenons sur ces formules trouvées en 2006,

$$\zeta(5)=\frac{694}{204813}\pi^5-\frac{6280}{3251}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{4\pi n}-1)}+\frac{296}{3251}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{5\pi n}-1)}-\frac{1073}{6502}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{10\pi n}-1)}+\frac{37}{6502}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{20\pi n}-1)}$$

$$\zeta(5)=\frac{11\pi^5\sqrt{3}}{5670}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{\sqrt{3}\pi n}-1)}-\frac{33}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{\sqrt{12}\pi n}-1)}+\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{\sqrt{48}\pi n}-1)}$$

$$\zeta(3)=\frac{13\pi^3\sqrt{3}}{45}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{\sqrt{3}\pi n}-1)}-\frac{9}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{2\sqrt{3}\pi n}-1)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{4\sqrt{3}\pi n}-1)}$$

$$\zeta(5)=\frac{5\pi^5\sqrt{7}}{3906}+\frac{64}{31}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{\sqrt{7}\pi n}-1)}+\frac{130}{31}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{\sqrt{28}\pi n}-1)}-\frac{4}{31}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{\sqrt{112}\pi n}-1)}$$

On remarque un motif dans les exposants (le terme avec $e^{\pi n}$), le motif est toujours (1, 2, 4) mais ce n'est pas le seul. Dans le cas de $\zeta(5)$ le motif est plutôt (4, 5, 10, 20). En fait en y regardant de près, le motif (1, 2, 4) sont les diviseurs de 4 et (4, 5, 10, 20) est un sous-ensemble des diviseurs de 20. De plus, la série pour $\zeta(5)$ converge relativement rapidement puisque chaque terme donne 5.46 décimales. Le motif (4, 5, 10, 20) est par ailleurs répété avec tous les $\zeta(4n+1)$.

En effet, les coefficients pour n=5, 9, 13, 17, … avec le motif (4, 5, 10, 20) persiste.

$\zeta(n)$	Formule
$\zeta(5)$	$\frac{694}{204813}\pi^5-\frac{6280}{3251}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{4n\pi}-1)}+\frac{296}{3251}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{5n\pi}-1)}-\frac{1073}{6502}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{10n\pi}-1)}+\frac{37}{6502}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{20n\pi}-1)}$
$\zeta(9)$	$\frac{6118928}{2048182032863705}\pi^9-\frac{3908360}{32194573151}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^9(e^{4n\pi}-1)}-\frac{15904}{1945731}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^9(e^{5n\pi}-1)}+\frac{1011431}{676776}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^9(e^{10n\pi}-1)}-\frac{497}{15565848}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^9(e^{20n\pi}-1)}$

$\zeta(13)$	$\frac{4131911428}{11996181573401025}\pi^{13}-\frac{2441359240}{1221199811}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{13}(e^{4n\pi}-1)}+\frac{1056896}{1221199811}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{13}(e^{5n\pi}-1)}-\frac{67121153}{39078393952}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{13}(e^{10n\pi}-1)}+\frac{8257}{39078393952}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{13}(e^{20n\pi}-1)}$
$\zeta(17)$	$\frac{687182059214356}{194362869568557017703375}\pi^{17}-\frac{1525878246920}{762905503491}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{17}(e^{4n\pi}-1)}-\frac{66978304}{762905503491}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{17}(e^{5n\pi}-1)}+\frac{17180065793}{97651904446848}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{17}(e^{10n\pi}-1)}-\frac{130817}{97651904446848}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{17}(e^{20n\pi}-1)}$

En reprenant l'une des formules de L. Vepstas [11], on peut trouver d'autres expressions, il en existe une infinité mais la plus efficace qui a été trouvée pour $\zeta(3)$ est ;

$$\zeta(3)=\frac{17\pi^3}{310}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\left(e^{4/\sqrt{2}n\pi}-1\right)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\left(e^{6/\sqrt{2}n\pi}-1\right)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\left(e^{12/\sqrt{2}n\pi}-1\right)}$$

Qui donne bien 3.86 décimales par terme. Elle est valide aussi aux valeurs $\zeta(4n-1)$, les coefficients étant différents.

Quant à la formule avec $\sqrt{7}$ et $\zeta(5)$, de la même façon, s'applique aux valeurs $\zeta(4n+1)$. Donc, la meilleure trouvée pour $\zeta(5)$ et les $\zeta(4n+1)$ permet tout de même d'avoir 5.46 décimales par terme. L'efficacité augmetant avec l'exposant de n. À ma connaissance ces formules sont les plus simples et les plus efficaces connues même si on doit évaluer la valeur de π.

La formule avec $\zeta(3)$ ci-haut est moins efficace que les formules de Amdeberhan et Zeilberger mais elle est plus simple à programmer.

Une autre modèle générateur de formules est le suivant.

$$\zeta(2n+1) = A\,\pi^{2n+1} + B\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2n+1}(e^{m\pi n}-1)} + C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2n+1}(e^{4/m\pi}-1)} \qquad 1$$

Où A, B et C sont rationnels, par exemple avec $\zeta(3), \zeta(5)$ et $\zeta(7)$ on a

$$\zeta(3) = \frac{1477}{19980}\pi^3 - \frac{2}{37}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{12n\pi}-1)} - \frac{72}{37}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{n\pi/3}-1)}$$

$$\zeta(5) = \frac{1493}{136350}\pi^5 + \frac{2}{9999}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{20n\pi}-1)} - \frac{20000}{9999}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{n\pi/5}-1)}$$

$$\zeta(7) = \frac{117799}{78189300}\pi^7 - \frac{2}{7529537}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7(e^{28n\pi}-1)} - \frac{15059072}{7529537}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7(e^{n\pi/7}-1)}$$

Elle est valide $\forall m \ \geq 3$.

Donc le 2ème terme peut converger très rapidement si m $\gg$ 3, tellement qu'en pratique à partir d'une certaine précision il peut être ignoré. Par exemple avec $\zeta(3)$, on a donc avec m = 256, on obtient une précision de 353 chiffres décimaux.

$$\zeta(3) \cong -\frac{268517377}{188755200}\pi^3 - \frac{2^{15}}{2^{14}+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\left(e^{\frac{n\pi}{64}}-1\right)}$$

Les coefficients (ici C dans l'équation) est très facile à identifier, le B est plus problématique mais calculable quand même. C'est une expression polynomiale simple. La précision de l'approximation croit de façon géométrique, suffisant pour en extirper une formule pratique.

On peut en exploiter les caractéristiques puisque :

$$\zeta(3)_k = -\frac{1}{180}\frac{\pi^3(k^4+20k^2+16)+360k^3}{k(k^2+4)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{\pi n4/k}-1)}$$

Approxime $\zeta(3)_k$ à k décimales.

En effet avec $k = 1, 2, 3, \ldots$ on a

k	Valeur	Expression
1	1.2747010908032…	$\frac{37\pi^3}{900} - \frac{2}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{\pi n4}-1)}$
2	1.2039282759189…	$\frac{7\pi^3}{180} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{\pi n2}-1)}$
3	1.2021065689101…	$\frac{277\pi^3}{7020} - \frac{18}{13}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{\pi n4/3}-1)}$
100	1.2020569031595942853997…	$\frac{6262501}{11254500}\pi^3 - \frac{5000}{2501}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\left(e^{\frac{\pi}{25}}-1\right)}$
10^9	1.2020569031595942853997…	$\frac{62500000000000001250000000000000001}{11250000000000000045000000000}\pi^3 - \frac{500000000000000000}{250000000000000001}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\left(e^{\frac{\pi}{250000000}}-1\right)}$

On remarque que dans le cas de $k = 2$, la formule est presque la même que celle de Ramanujan sauf pour le facteur 2 dans la somme infinie. Pour avoir la k'ième décimale il suffit alors de poser

$$[10^k(f(k))] \ mod\ 10$$

$f(k)$ étant l'une des formules du tableau.

Elles convergent assez lentement mais au moins on a une formule compacte et close.

Si on applique le même procédé pour les autres valeurs de $\zeta(2n+1)$, les coefficients deviennent assez volumineux. Rien que pour $\zeta(5)$, je n'ai pas réussi à obtenir l'équivalent qui soit avec une expression polynomiale de degré 10, c'est encore pire avec $\zeta(7)$.

Une autre possibilité est de trouver une façon d'obtenir explicitement l'expression du terme (équation 1).

$$S(k,m) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k(e^{n\pi/m}-1)}$$

Dans un article précédent, je donnais les formes explicites des séries avec un k négatif.

$S(5{,}1)$	$\frac{3}{64}\frac{\pi^3}{\Gamma(3/4)^{12}}+\frac{1}{504}$	$\frac{120}{\pi^6}$
$S(5{,}2)$	$\frac{1}{504}$	$\frac{15}{8\,\pi^6}$
$S(5{,}4)$	$\frac{-3}{2^{12}}\frac{\pi^3}{\Gamma(3/4)^{12}}+\frac{1}{504}$	$\frac{15}{2^9\,\pi^6}$

En s'inspirant de ce modèle, à l'aide du programme Pari-GP (lindep) ou PSLQ (version Maple) on peut identifier l'expression exacte de S(5,3) et même S(5,a/b). En effet, pour S(5,3) on obtient bien (basé sur le même modèle).

$$S(5,3) = \frac{61}{5184}+\frac{17\sqrt{3}}{2592}-\sqrt{\frac{(154512+89222\sqrt{3}}{23328}}\frac{\pi^3}{\Gamma(3/4)^{12}}+\frac{1}{504}$$

Et de là, certaines valeurs fractionnaires

$$S\left(5,\frac{1}{5}\right) = \frac{11547}{64}+\frac{1296\sqrt{5}}{16}+\sqrt{\frac{(1974320\ +882969\sqrt{5}}{16}}\frac{\pi^3}{\Gamma(3/4)^{12}}+\frac{1}{504}$$

Ce qui donne un espoir de pouvoir calculer explicitement la valeur de $S\left(-5,\frac{1}{5}\right)$. Ici le modèle utilisé plus haut ne fonctionne pas parce que (principalement) les valeurs aux arguments négatifs de la fonction $S\left(-n,\frac{a}{b}\right)$ ne sont pas simples. Par exemple $S\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ est connu explicitement :

$$S\left(-1,\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16}\ln(2)-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)-\frac{1}{4}\ln(\pi)+ln\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{\pi}{48}$$

Le degré du terme algébrique est très imprévisible et les coefficients aussi. On a bien une expression avec (toujours les mêmes) : $\ln(2)$, $\ln(\pi)$, π et $ln\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$, le dernier morceau est inconnu et probablement de degré élevé, donc difficilement détectable.

Bibliographie

[1-5] Ramanujan Notebooks, Springer Verlag

Berndt, Bruce C. (1985). Ramanujan's Notebooks: Part I. New York: Springer.
Berndt, Bruce C. (1999). Ramanujan's Notebooks: Part II. New York: Springer.
Berndt, Bruce C. (2004). Ramanujan's Notebooks: Part III New York: Springer.
Berndt, Bruce C. (1993). Ramanujan's Notebooks: Part IV. New York: Springer.
Berndt, Bruce C. (2005). Ramanujan's Notebooks: Part V. New York: Springer.

[6] Plouffe, Simon : Identities inspired by the Ramanujan Notebooks, second series https://arxiv.org/abs/1101.6066

[7] Plouffe, Simon : Identities inspired from the Ramanujan Notebooks, first series (1998) https://arxiv.org/abs/1101.4826

[8] Tewodros Amdeberhan, Doron Zeilberger : Hypergeometric Series Acceleration Via the WZ method : The Electronic Journal of Combinatorics 1997.

[9] Apéry constant, https://en.wikipedia.org/wiki/Ap%C3%A9ry%27s_constant

[10] Particular values of the Riemann zeta function https://en.wikipedia.org/wiki/Particular_values_of_the_Riemann_zeta_function

[11] Linus Vepstas, On Plouffe's Ramanujan Identities : https://arxiv.org/abs/math/0609775

[12] Gery Huvent : Formules BBP : https://www.yumpu.com/fr/document/read/28964800/formules-bbp-epsilon-maths- la-page-perso-de-gery-huvent

[13] Boris Gourevitch : http://www.pi314.net/fr/perso.php http://www.pi314.net/fr/index.php

[14] D.J. Broadhurst, Polylogarithmic ladders, hypergeometric series and the ten millionth digits of $\zeta(3)$ and $\zeta(5)$. https://arxiv.org/abs/math/9803067